Шифр: 9-23

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Гатчинский

Школа МБОУ „Пригородная СОШ"

Класс 9

ФИО Тюков Даниил Алексеевич

1	2	3	4	5	Σ
7	7	0	0	0	14

(9.1) Будем заменять фразу „кучку из n конфет делим на кучки из a и b конфет" на „делим n на a и b". Фразу „кучки из a и b конфет объединяем в кучку" заменим на „a и b объединяем".

У нас кучки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 изначально

В 1 минуту делим 8 на 3 и 5: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 3, 5, 10, 9

Во 2 минуту объединяем 2 и 3 ~~в 5~~: 1, 5, 4, 5, 6, 7, 3, 5, 9, 10

В 3-ю минуту 7 делим на 2 и 5: 1, 5, 4, 5, 6, 2, 5, 3, 5, 9, 10

В 4-ю минуту объединяем 2 и 3: 1, 5, 4, 5, 6, 5, 5, 5, 9, 10

В 5-ю минуту делим 6 на 5 и 1: 1, 5, 4, 5, 5, 1, 5, 5, 9, 10, 5

В 6-ю минуту объединяем 1 и 4: 5, 5, 5, 5, 1, 5, 5, 9, 10, 5

В 7-ю минуту делим 9 на 4 и 5: 5, 5, 5, 5, 1, 5, 5, 4, 5, 10

В 8-ю минуту объединяем 4 и 1: 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 10

В 9-ю минуту делим 10 на 5 и 5: 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5

Т. о. мы разделим наши кучки на 11 кучек по 5 конфет

(9.2) 3 ~~наибольших числа и 3 наименьших~~ числа по модулю все не могут быть $\geq$ 1000. Пусть $|a|>1000$, $|b|>1000$, $|c|>1000$. Тогда ~~$(|a|)^2 \geq 100$~~

$(|a|)^2 \geq 1000^2$, $(|b|)^2 \geq 1000^2$, $(|c|)^2 \geq (1000)^2 \Rightarrow |a|^2+|b|^2+|c|^2 \geq 1000^2+1000^2+1000^2$

$= 3000.000$, что противоречит условию.

$3000000 = 3 \cdot 1000^2$ или $3000000 = 3 \cdot (-1000)^2$

Разберемся с натуральными числами. Разницы между соседними хотя бы 10, по этому такие можно составить неравенства.

$a_1 \geq 1$

$a_2 \geq 11$

$a_3 \geq 21$

....

$\cancel{a_{97} \geq 981}$

$\cancel{a_{98} \geq 991}$

$\cancel{a_{99} \geq 1001}$

$a_{99} \geq 981$

$a_{100} \geq 991$

$a_{101} \geq 1001$

$a_{102} \geq 1011$

$a_{103} \geq 1021$

Но их не более 103 натуральных т.к.

$a_{101} \geq 1001 > 1000$, $a_{102} \geq 1011 > 1000$, $a_{103} \geq 1021 > 1000$

Ну, а мы доказали, что 3х чисел, больших 1000 быть не может.

Рассмотрим $a_{100}, a_{101}, a_{102}$.

$$a_{100}^2 \geq 991^2$$
$$a_{101}^2 \geq 1001^2$$
$$a_{102}^2 \geq 10\ 1^2$$
$$a_{100}^2 + a_{101}^2 + a_{102}^2 \geq 991^2 + 1001^2 + 1011^2$$

Докажем, что $991^2 + 1001^2 + 1011^2 > 3000000$

Обозначим за n 1000.

$$(n-9)^2 + (n+1)^2 + (n+11)^2 > 3n^2$$
$$n^2 - 18n + 81 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 22n + 121 > 3n^2$$
$$3n^2 + 6n + 203 > 3n^2$$, что верно при n 1000. Значит, 102 числа также быть не может.

Пример 101 натур. числа: 1, 11, 21, 31 .... 981, 991, 1001;

$981^2 + 991^2 + 1001^2 < 3000000$.

$(1000-19)^2 + (1000-9)^2 + (1000+1)^2 = 1000^2 - 38000 + 361 + 1000^2 + 81 - 18000 + 1000^2 + 2000 + 1 = 3000000 - 53557 < 3000000$

Рассмотрим отрицательные и там, проведя аналогичные рассуждения с модулями ($a_1 = -1$), получим, что их также не более 101

Т.о. всего чисел не более 202.

Пример: -1009, -999, -989 ..... -9, 1, 11, 21 ..... 981, 991, 1001

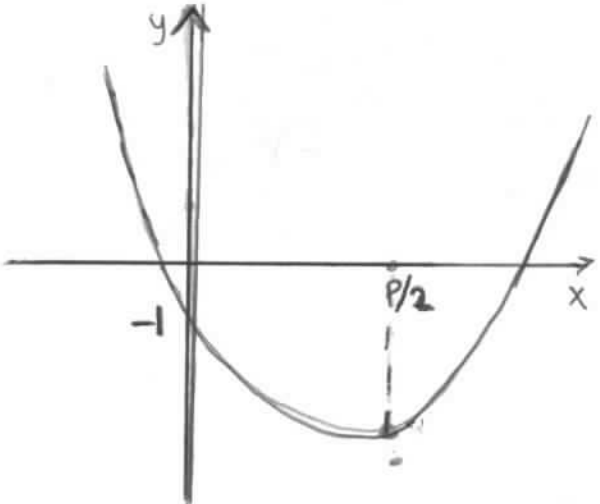
Проверкой можно убедиться, что $(-1009)^2 + (-999)^2 + (-989)^2 < 3000000$

Пусть $n = -1000$, тогда $(n-9)^2 + (n+1)^2 + (n+11)^2 = n^2 + 81 - 18n + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 22n + 121 = 6n + 3n^2 + 203 < 3n^2$ при $n = -1000$ $(-6000 + 203 < 0)$.

А то, что $981^2 + 991^2 + 1001^2 < 3000000$ мы проверили выше.

Ответ: 202.

(9.4) Пусть $py+1=ab$, где $a,b\in \mathbb{N}$. Тогда ~~надо доказать, что~~ найдутся a, b, y, таких, что $y<a$ или $y<b$. ~~Пусть это не так и всегда~~ найдется y, что ~~$y>a$ и $y>b$, при любых парах a и b. Перемножив $y>a$ и $y>b$ ($y,a,b\in\mathbb{N}$, поэтому так можно) $y^2>ab$ или $y^2>py+1$.~~ Раз это так, то $y^2<ab$. и, значит $y^2<py+1 \Rightarrow y^2-py-1<0$. Пусть $F(y)=y^2-py-1$, где p - фиксировано.



его вершина $\frac{-(-p)}{2\cdot 1}=\frac{p}{2}$ (координата x)

$F(0)=-1$. Т.к. коэффициент при $y=1$, то ветви вверх и вторая координата вершины ниже оси x. Значит при всех $x\in(0;\frac{p}{2})$ значения отрицательные.

Значит, ни при каком $y<\frac{p}{2}$ и ($y\in\mathbb{N}$) не будет $F(y)>0$. Тем самым утверждение задачи верно. Т.к. найдется y, что $y^2<py+1$, а значит $y^2<ab$ ~~и это значит~~, из этого следует, что не представить так, чтобы $y>a$, $y>b$ ведь если это было бы так, то $y^2>ab$ и тогда ~~нашелся~~ все бы y, что $y^2>py+1$, а из этого следовало бы, что у функции $F(y)$ в нашелся бы y, что $F(y)>0$ при $y\in(0;p/2)$, а этого не могло быть. (мы это доказали)

Шифр: 2-9-03

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Гатчинский

Школа МБОУ „Пригородная СОШ"

Класс 9

ФИО Тюков Даниил Алексеевич.

2-9-03

6	7	8	9	10	
1	2	3	4	5	Σ
7	7	0	0	0	14

Задача 7.

Пусть у нас есть 2 подряд ~~стоящих~~ отвечавших изначально зеленых хамелеончика. Рассмотрим их.

$\underbrace{\qquad\qquad}_{x}\ \underset{1\ 2}{З\,З}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{n}$ Показана ~~очередь~~ порядок ответов на вопрос, где перед этой парой опрошено было x хамелеонов, а после них остались неопрошены n хамелеонов (n и x не меньше 0). Теперь рассмотрим числа, которые назвали эти хамелеоны. Первый посчитал x хамелеонов, т. к. они все зеленые, поскольку зеленые остались зелеными, а коричневые поменяли цвет на зелёный посчитал своего соседа справа $\left(\frac{З}{2}\right)$ и количество изначально зелёных среди n хамелеонов. (если среди них коричневые (а они не поменяли цвет) то он их не считал). Второй хамелеон посчитал всех x хамелеонов, количество зеленых среди n хамелеонов и своего соседа слева $\frac{З}{1}$.

Эти суммы равны, ~~А~~ но по условию все 2019 хамелеонов сказали по 1 разу каждое число от 1 до 2019. Противоречие. Значит, двух изначально зеленых опрошенных подряд нет.

$\underset{1}{\boxed{xx}}\ \underset{2}{\boxed{xx}}\ \underset{3}{\boxed{x}}\ \underset{4}{\boxed{x}}\ \dots\ \underset{1009}{\boxed{xx}}\ \underset{1010}{\boxed{x}}$ Разбиваем хамелеонов на 1009 групп по 2 в порядке их опроса и 1 групп по 1 хамелеону. В каждой не более 1 хамелеона изначально зеленого цвета. Значит, изначально зелеными были не больше 1010 хамелеонов. Пример:

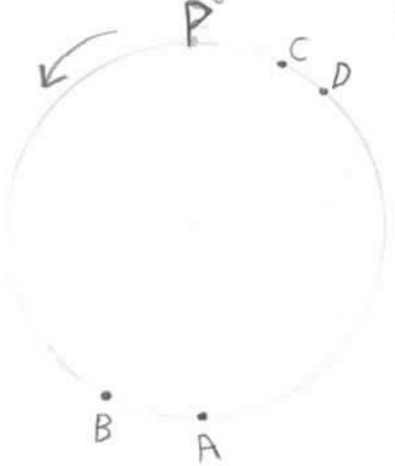
$\underset{1010}{З}\ \underset{1}{К}\ \underset{1011}{З}\ \underset{2}{К}\ \underset{1012}{З}\ \dots\dots\ \underset{1009}{К}\ \underset{2019}{З}$

Изначально 1010 хамелеонов и 1 сказал правду, а ~~он~~ 2 соврал и он поменяет цвет и станет 1011 хамелеонов зеленых и 3 сказал правду и т.д. Каждый хамелеон опрошенный ~~на~~ нечетным по счету, ~~а четный~~ скажет правду, а ~~не~~ четный нет и по очереди они все станут зелеными ~~какие~~.

они назвали числа от 1 до 2009, но зеленых не менее 1010 и они соврали, а, значит, поменяли цвет, и продолжив рассуждения про 1, 2, 3 хамелеона мы раскрасили их по очереди в зеленый, а изначально зеленые не соврут.

2-9-03

Задача 9.6.



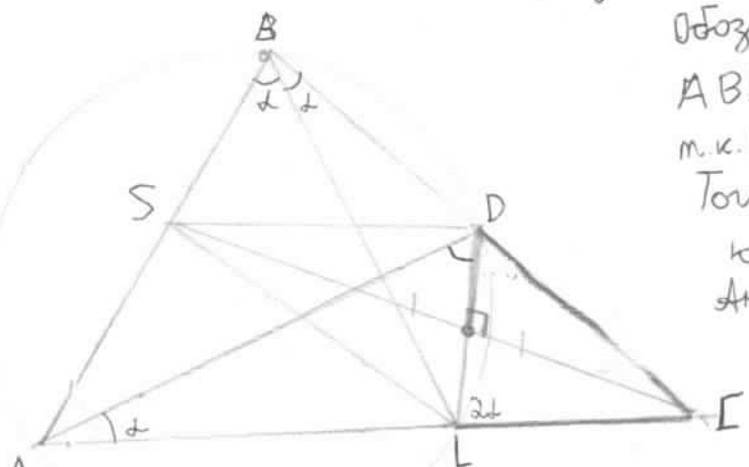
P - место старта ребят.

A - диаметрально противоположная, относительно P точка.

B - точка, где Петя будет, когда Миша пробежит полукруг. Она левее т.к. Миша его быстрее и он пробежал по этому больше, а они пока бежали оба против часовой стрелки

Итак Миша пробежал полукруг и развернулся и по дороге встретил Петю в 1 раз, не считая старта. Затем по часовой стрелке добегает до места старта и бежит до встречи с Петей в точк D. Она есть т.к. он не успел пробежать весь круг, пока Миша успел со своей большей скоростью. Затем Миша пробегает буквально 2 шага или один что бы Петя далеко не ~~отстал~~ убежал, и разворачивается (он может это т.к. он до 2 встречи пробежал больше полукруга) так он встретит Петю в 3 раз Таким образом он поравнялся с Петей в т. B, D и некой C которая $\in$ дуге$(P; D)$

Задача 9.8.



Обозначим $\angle ABL - \alpha$.

ABDL - вписанный четырехугольник т.к. все его точки на окружности:

Тогда $\angle LAD = \angle LBD = \alpha$ (углы, опирающиеся на 1 дугу)

Аналогично $\angle ABL = \angle ADL = \alpha$

Значит $\triangle ADL$ - равнобедренный т.к. 2 угла равны α. $\angle DLC = 2\alpha$ по т-ме о внешнем угле.

Т.к. S симметрично, то $SL = LC$, а $SD = DC$. ~~$\triangle CDL$ - равнобедр. $\Rightarrow \angle LDC = 2\alpha$.~~

$\triangle SDL$ и $\triangle SLC$ - равноб.

Задача 9.10.

Расположим числа по кругу.

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9

И запишем у каждой дроби такой знаменатель: сумма квадратов всех 9 чисел (x_n^2). ~~Сумма~~ + сумма попарных произведений чисел стоящих в круге через 1. (пример. $x_n x_{n+2}$) + ~~и~~ удвоенное произведение соседних чисел ($2x_1x_2$ к примеру).

А ~~зна~~ числители как у наших дробей в условии. От этого их сумма уменьшится, поскольку знаменатели увеличатся и дроби ~~тоже в положительных и в отрицательных увеличатся тоже~~ числах уменьшатся

приведем в к общему знаменателю

$$\frac{x_1-x_3+x_2-x_4+x_3-x_5+x_5-x_7+x_6-x_8\ldots x_9-x_2}{x_1^2+x_2^2\ldots\ldots+2x_1x_2\ldots+x_1x_3\ldots}$$ и она равна 0. (числитель равен 0), а знаменатель положителен т.к. все числа положительны). И таким образом наша сумма равна 0. Поскольку в ходе операции мы уменьшили дроби и сумму также, то исходная была не меньше 0, (равна если все 9 чисел равны)